TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

Studijski program: Primijenjeno računarstvo

VII termin

Dr Nevena Radović

Diferencne jednačine

- Diferencna jednačina povezuje ulazni I izlazni signal. Njen opšti oblik je:

$$\sum_{i=0}^{M} B_i x(n-i) = \sum_{j=0}^{N} A_j y(n-j)$$

- Da bi diferencna jednačina jednoznačno odredila izlazni signal $y(n)$, potrebno je definisati ***početne uslove***.
- Npr. početni uslovi mogu biti kauzalnost sistema (odziv ne postoji prije pobude)).

Diferencne jednačine

- Diferencne jednačine su slične diferencijalnim jednačinama.

Razlika:

- Diferencijalne jednačine se koriste za teorijsko predstavljanje sistema, dok se diferencne jednačine koriste i u cilju realizacije samog sistema.
- Kod diferencnih jednačina odziv $y(n)$ zavisi od njegovih prethodnih vrijednosti u trenucima:

$$y(n\text{-}1),\ y(n\text{-}2),\ldots,\ y(n\text{-}N),$$

kao i od ulaza:

$$x(n),\ x(n\text{-}1),\ \ldots,\ x(n\text{-}M).$$

Diferencne jednačine

- **Primjer**: Data je diferencna jednačina prvog reda (N=M=1)

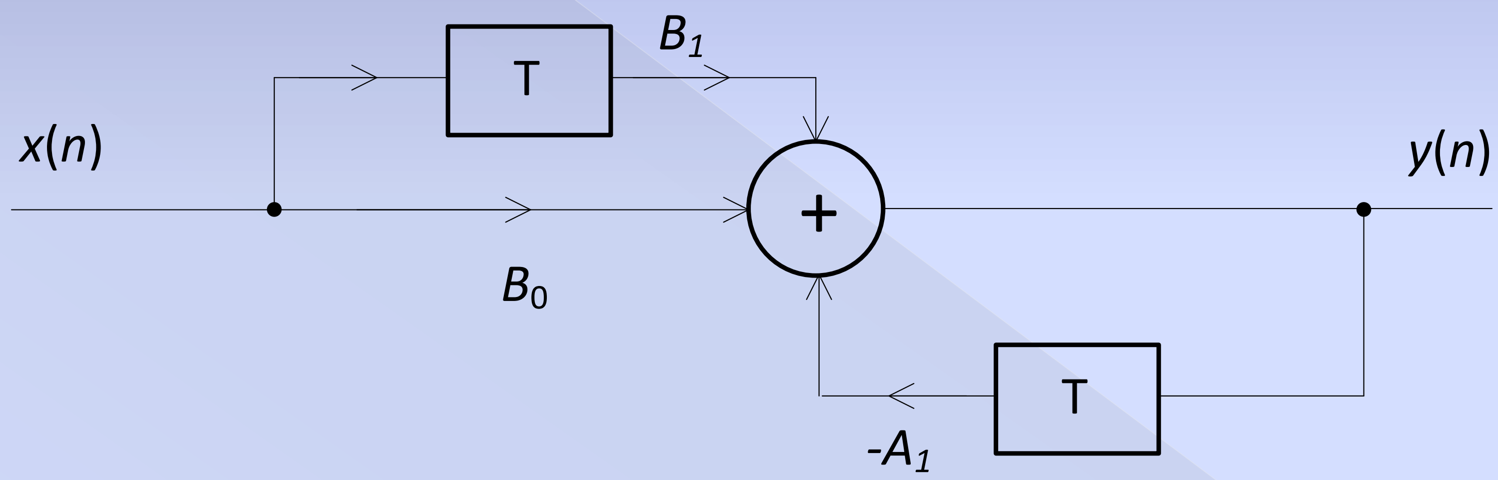
$$y(n) = -A_1 y(n-1) + B_0 x(n) + B_1 x(n-1)$$

Pretpostavljajući da je sistem kauzalan, odrediti impulsni odziv sistema.

- **Rješenje**:
- Posmatrajmo najprije načine realizacije ovog sistema. Sistem može biti realizovan na dva načina:
  - Hardverski,
  - Izračunavanjem izraza y(n) (bilo ručno, bilo softverski).

Diferencne jednačine

- Hardverska realizacija:



Diferencne jednačine

- Izračunavanje odziva: $x(n)=\delta(n)$, $y(n)=h(n)=?$

  Imajući u vidu da je sistem kauzalan zaključujemo da je $h(n)=0$ za $n<0$.

  $h(0)=-A_1 h(-1)+B_0\delta(0)+B_1\delta(-1)=B_0$

  $h(1)=-A_1 h(0)+B_0\delta(1)+B_1\delta(0)=-A_1 B_0+B_1$

  $h(2)=-A_1 h(1)+B_0\delta(2)+B_1\delta(1)=-A_1\,(-A_1 B_0+B_1)$

  $h(3)=-A_1 h(2)+B_0\delta(3)+B_1\delta(2)=(-A_1)^2(-A_1 B_0+B_1)$

  ...

  $h(n)=(-A_1)^{n-1}(-A_1 B_0+B_1)$ za $n\geq 1$

- Uočavamo da je konačno:

$$h(n)=B_0\delta(n)+(-A_1)^{n-1}(-A_1 B_0+B_1)u(n-1)$$

IIR i FIR sistemi

- $h(n)$ traje beskonačno (teži ∞) → **IIR Sistem** (Infinite Impulse Response – sistem sa beskonačnim impulsnim odzivom).

- Napomena 1: Sistem je uvijek IIR kada postoje A_j za $j>0$, odnosno kada postoji povratna sprega ($y(n)$ se izražava preko $y(n-j)$).

- Napomena 2: Ukoliko je $A_j=0$ za svako $j>0$ tada imamo **FIR Sistem** (Finite Impulse Responese - sistem sa konačnim impulsnim odzivom)

FT diskretnih signala

- Prepostavimo prostoperiodinčni pobudni signal:

$$x(n)=e^{j(\omega n+\theta)}$$

- Tada možemo pisati:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(\omega(n-k)+\theta)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}e^{j(\omega n+\theta)}=$$

$$=e^{j(\omega n+\theta)}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}=e^{j(\omega n+\theta)}H(e^{j\omega})$$

FT diskretnih signala

- Uočavamo da je izlazni signal takođe prostoperiodični (sa promijenjenom amplitudom I fazom u odnosu na ulazni signal).

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = FT[h(n)]$$

- što je Fourier-ova transformacija signala $h(n)$.

- Napomena: Pošto je $H(e^{j\omega})$ Fourier-ova transformacija impulsnog odziva $h(n)$, to slijedi da je $H(e^{j\omega})$ frekventni odziv sistema.

FT diskretnih signala

- Uopšteno: FT proizvoljnog signala x(*n*) je:

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Napomena: Pošto je $e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}$, zaključujemo da je $X(e^{j\omega})$ periodična funkcija po ω sa periodom 2π.
- Dakle, $X(e^{j\omega})$ se može posmatrati i kao Fourier-ov red, pošto je $X(e^{j\omega})$ periodična.
- Inverzna FT:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega$$

Integral se traži na osnovnom intervalu [-π, π].

FT diskretnih signala

- **Primjer 1:** Odrediti FT diskretnog signala:

  $x(n)=a^n u(n)$, za $|a|<1$.

- **Rješenje:**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

- Pošto je $|ae^{-j\omega}| = |a||e^{-j\omega}| < 1$, $X(e^{j\omega})$ predstavlja sumu geometrijskog reda:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-a\cos\omega + ja\sin\omega}$$

FT diskretnih signala

- **Podsjećanje**:
- Suma geometrijskog reda je:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1-x^N}{1-x}$$

- *N* je broj članova reda. Ukoliko je $|x|<1$ i ukoliko se radi o beskonačnom redu $N\to\infty$ tada je $(x)^N\to 0$ pa je:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1}{1-x}$$

FT diskretnih signala

- Amplitudska karakteristika:

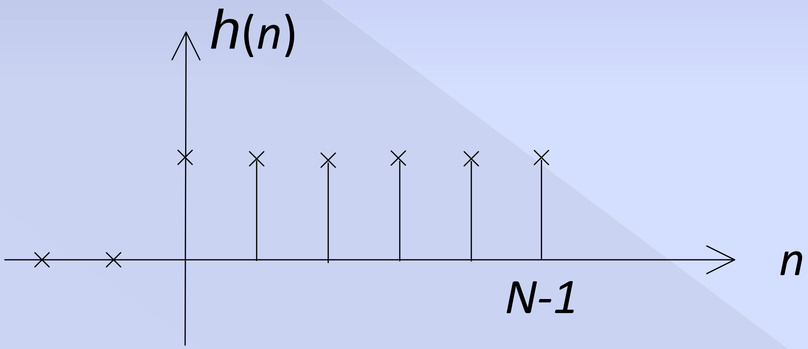
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}$$

- Fazna karakteristika:

$$\arg(H(e^{j\omega})) = -arctg\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

FT diskretnih signala

- **Primjer 2**: Odrediti FT signala $h(n)=u(n)-u(n-N)$.
- **Rješenje**:
- Najprije predstavimo grafički ovaj signal:



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\omega})^n = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

FT diskretnih signala

- Uprostimo dalje dobijeni izraz:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}} \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{2j\sin(\omega N/2)}{2j\sin(\omega/2)} =$$

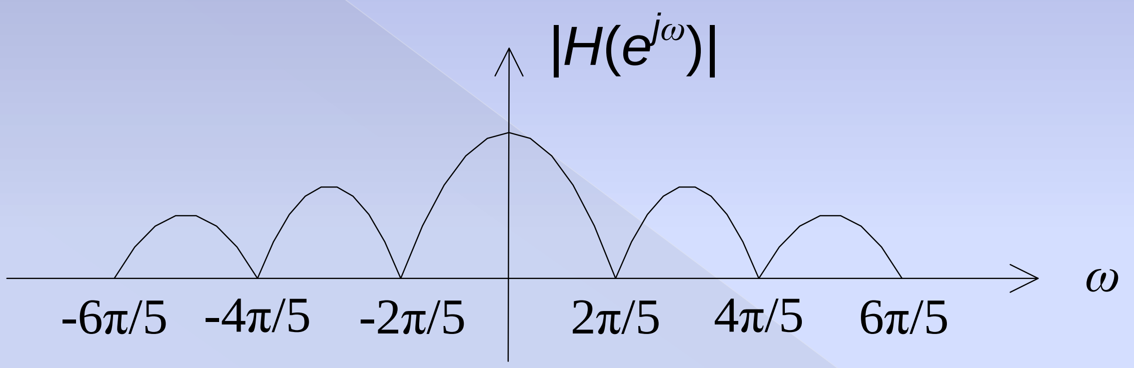
$$= e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

- Amplitudska karakteristika:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|e^{-j\omega(N-1)/2}\right| \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right| = \left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

FT diskretnih signala

- Predstavimo grafički amplitudsku karakteristiku za N=5:



- sin(ωN/2) za ωN/2=kπ pa slijedi da je ω=2kπ/5.

Osobine FT diskretnih signala

- 1. **Linearnost:**

$$FT[ax(n)+by(n)]=aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$$

- 2. **Pomjeranje po vremenu:**

$$FT[x(n-n_0)]=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

- 3. **Modulacija:**

$$FT[x(n)e^{j\omega_0 n}]=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- 4. **Konvolucija signala:**

$$FT[x(n)*h(n)]=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$$

Praktični značaj ove osobine: Ako je $h(n)$ impulsni odziv sistema a $x(n)$ pobudni signal, tada proizvod $X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$ predstavalja FT izlaznog signala i tada je $y(n)=IFT[Y(e^{j\omega})]$.

Osobine FT diskretnih signala

- 5. **Proizvod nizova:**

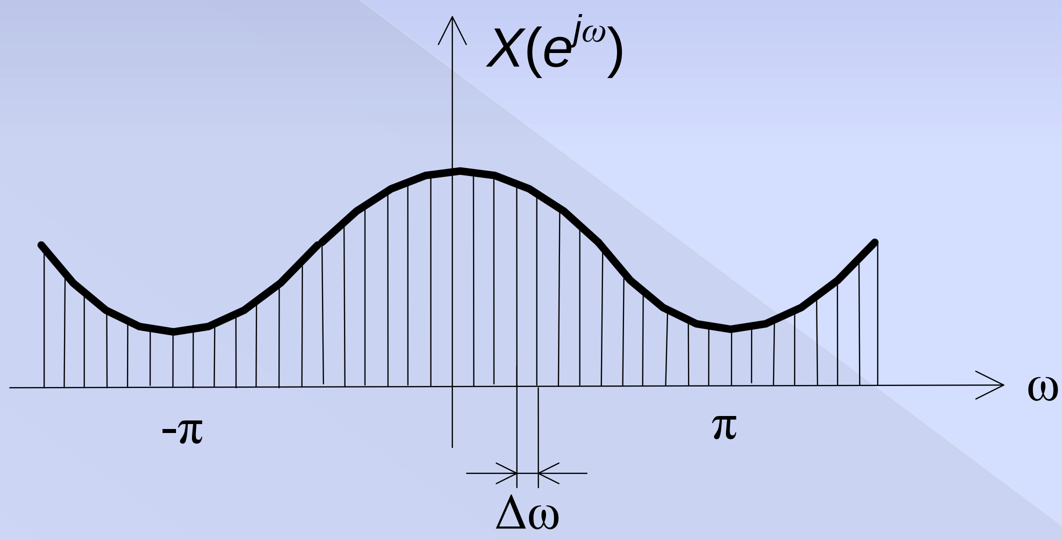
$$FT[x(n) \cdot h(n)] = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

- Veoma često upotrebljavana jednakost:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} = 2\pi\delta(\omega)$$

Diskretna FT (DFT)

- FT diskretnih signala je periodična funkcija sa periodom 2π. U cilju njene praktične primjene vrši se njena diskretizacija odabiranjem. Time se dobija DFT.



- $\Delta\omega = 2\pi/N$ je **korak odabiranja** FT diskretnog signala $x(n)$. To znači da se uzima N odbiraka po periodi, odnosno $2\pi/N$.

Diskretna FT (DFT)

- Koliko je N?
- DFT predstavlja transformaciju periodičnog signala $x_p(n)$, dobijenog produžavanjem signala $x(n)$ čija je FT ustvari $X(e^{j\omega})$.
- Perioda signala $x_p(n)$ je Np=N. Dakle, isti je broj odbiraka kao za FT $X(e^{j\omega})$ da bi se dobila DFT.
- Da bi signal $x_p(n)$ predstavljao periodično produženi signal $x(n)$, čija se FT i DFT traži, potrebno je zadovoljiti uslov da je:

$N \geq$ trajanje ili dužina diskretnog signala $x(n)$

Diskretna FT (DFT)

- Definicija DFT signala $x_p(n)$:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- gdje je $x_p(n) = x(n)$ za $0 \leq n \leq N-1$.
- Često se označava: $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = W_N^{kn}$, odnosno:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{nk}$$

- Inverzna DFT:

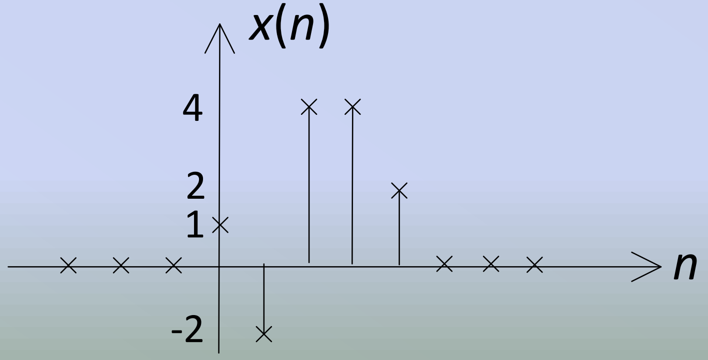
$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W_N^{-nk}$$

Diskretna FT (DFT)

- Napomena: Ukoliko je $x(n)$ periodičan signal, tada postoji samo njegova DFT, dok njegova FT ne postoji, pošto ne zadovoljava uslov konvergencije.
- **<u>Primjer:</u>** Odrediti DFTsignala:

$$x(n)=\delta(n)-2\delta(n-1)+4\delta(n-2)+4\delta(n-3)+2\delta(n-4)$$

- **<u>Rješenje</u>:** Trajanje niza $x(n)$ je 5, tako da je potrebno uzeti period $N \geq 5$. Ukoliko je $N=5$ imamo da je:



Diskretna FT (DFT)

$$X_p(n) = \sum_{k=0}^{4} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{5}nk}$$

$$= \sum_{k=0}^{4} (\delta(n) - 2\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4)) e^{-j\frac{2\pi}{5}nk} =$$

$$= 1 - 2e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{5}2k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{5}4k} =$$

$$= \ldots = 1 + 4j\sin\frac{2\pi}{5}k + 8\cos\frac{2\pi}{5}2k$$

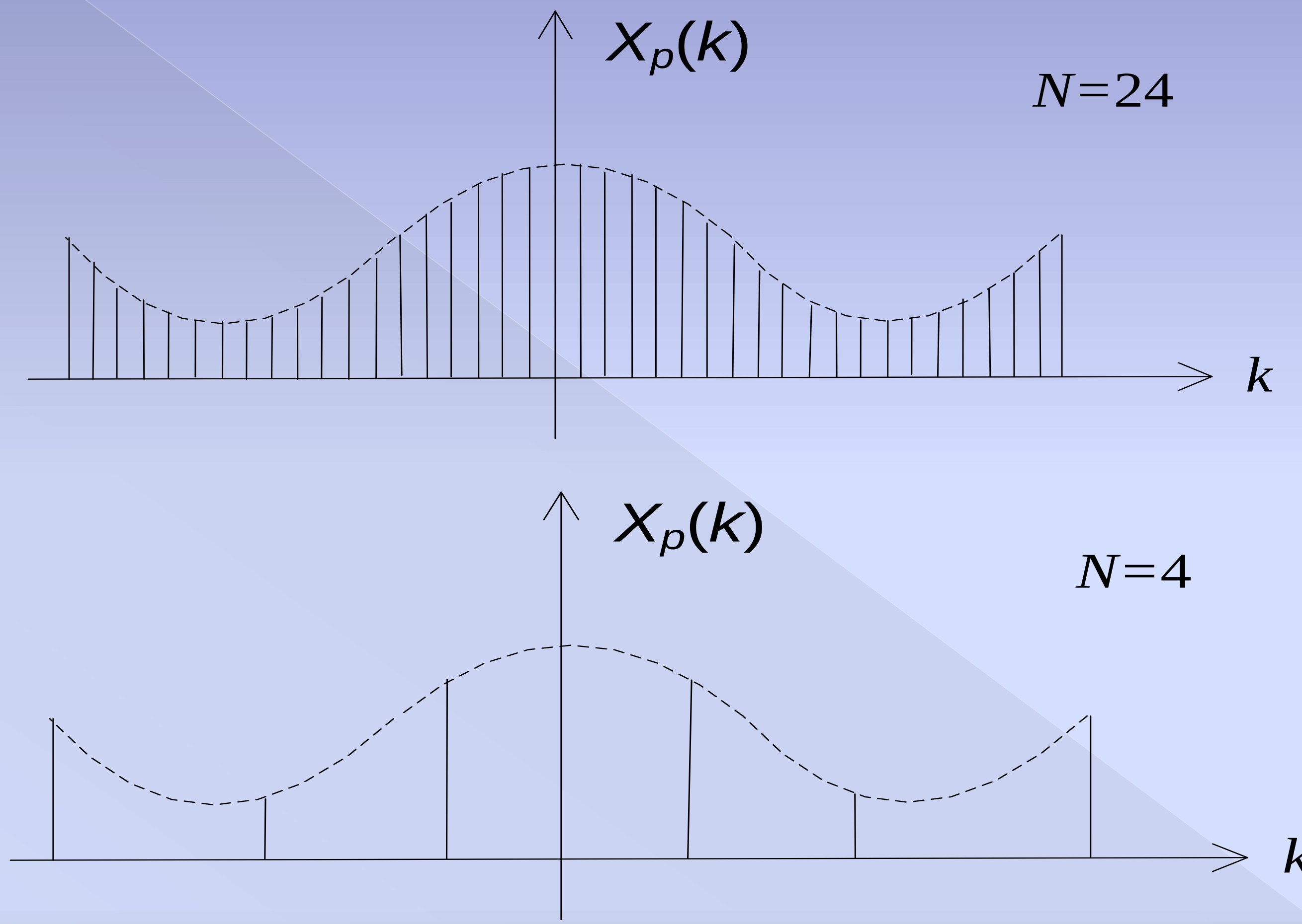
- Perioda funkcije $X_p(k)$ je $k_p=5$, odnosno N=5, što je ista perioda kao perioda periodično produženog signala $x_p(n)$.
- Ovo dobijamo jer je: $\sin\frac{2\pi}{5}(k+k_p) \Rightarrow \frac{2\pi}{5}k_p = 2\pi \Rightarrow k_p = 5$

Dodavanje nula (Zero padding)

- Često je potrebno imati gušće odabiranje FT diskretnog signala u cilju dobijanja što vjernije predstave njegove DFT.

- **Rješenje:**
- Produžavanjem signala $x(n)$ nulama, povećava se perioda njegovog periodičnog produženja $x_p(n)$. Time se ne mijenja vrijednost signala $x(n)$, samo se mijenja perioda signala $x_p(n)$.

Dodavanje nula (Zero padding)



- Vjernija reprezentacija je sa periodom N=24, iako se radi o istoj FT diskretnog signala $x(n)$.